11º FEPEG FÓRUM
ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X
Realização: Unimontes, Minas Gerais. Apoio: FAPEMIG, FADENOR

SISTEMAS DINÂMICOS : CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS PLANARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Autores: JOSÉ LEANDRO SOUZA CASTRO;

Introdução

No mundo da ciência e da engenharia a maioria das mais importantes equações diferenciais são de segunda ordem, isto é, são da forma $x''=f(t,x,x')$?. A Segunda Lei Newton ($mx''=f(x)$?), por exemplo, é a base da Mecânica Clássica que estudamos na Física; também temos a equação para circuitos RLC ($LCx''+RCx'+x=v(t)$?), com importantes aplicações no estudo de circuito elétricos. No estudo de Sistemas Dinâmicos, buscamos compreender o comportamento qualitativo dessas equações. Portanto, observaremos algumas características dessas equações.

Equações Diferenciais de Segunda Ordem e Sistemas Planares

As equações diferenciais de segunda ordem podem ser associadas a um sistema planar, introduzindo uma mudança de variável $y=x'$? . Com essa mudança, obtemos um sistema bidimensional de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$x'=f(x,y) \qquad y'=g(x,y)$?

que pode ser reescrito como $X'=F(X)$?, onde $X=(x,y)$? e $F(X)=F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$?.

A classe mais importante dos sistema planares são os de equações lineares, cuja forma é dada por:

$x'=ax+by \qquad y'=cx+dy$?

onde a, b, c e d são constantes. Podemos ainda abreviar esse sistema para $X'=AX$,? onde A é a matriz dos coeficientes desse sistema.

Proposição 1. O sistema planar linear $X'=AX$? tem

1. Um único ponto de equilíbrio se det$A?0$?;

2. Uma reta de pontos de equilíbrio se detA$=0$? (e A não for a matriz nula).

Definição 1. Um vetor não nulo $V0$? é dito autovetor de A se $AV0=?V0$?, para algum ??. A constante ?? é chamada autovalor de A.

Teorema 1. Seja $V0$? um autovetor de A associado ao autovalor ??. Então a função $Xt=e?tV0$? é uma solução para o sistema $X'=AX$?.

Teorema 2. Seja $?1$? e $?2$? um par de autovalores reais distintos de A, associados aos autovetores $V1$?e $V2$.? Então a solução geral do sistema $X'=AX$? é dada por

$X(t)=?e?1tV1+?e?2tV2$.

Corolário 1. Seja ?±?? os autovalores complexos de A, onde A é a matriz 2x2 com coeficientes ?, ? ?, -? ?, ?, com autovetor $V0=(1,i)$. ? Então a solução geral do sistema é dada por

$X(t)=?e?t(\cos(?t),-sen(?t))+?e?t(sen(?t),\cos(?t))$?.

Retrato de Fase de Sistemas Planares

11º FEPEG
FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X
Realização: Unimontes Universidade Estadual de Montes Claros · Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Ensino Superior · Minas Gerais Governo de Todos · PIBID Unimontes Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
Apoio: FAPEMIG · FADENOR

Ao conhecer a solução de um sistema planar, podemos representar seu retrato de fase para reconhecermos o tipo de ponto de equilíbrio que o sistema possui.

Exemplo 1. Consideremos um sistema $X'=AX$?, onde A é uma matriz diagonal?, com $?_1$, $?_2$? IR?, cuja solução geral é $X(t)=?e^{?_1 t}(1,0)+?e^{?_2 t}(0,1)$?. ? Podemos considerar três casos:

1. $?_1<0<?_2;$?

2. $0<?_1??_2;$?

3. $?_1??_2<0.$?

No primeiro caso, temos que as soluções do tipo $X_1(t)=?e^{?_1 t}(1,0)$, ?que coincidem com o eixo x, tendem ao ponto (0,0) quando $t??$?. Este eixo é chamado *linha estável.* Por outro lado, as soluções do tipo $X_2(t)=?e^{?_2 t}(0,1)$?, que coincidem com eixo y, tendem a se afastar de (0,0) quando $t??$?. Este eixo é uma *linha instável.* Todas as outra soluções tendem para o infinito na direção da linha instável à medida em que t cresce; e tendem para o infinito na direção da linha estável quando t decresce. O ponto de equilíbrio deste sistema é chamado de *sela* (veja Fig. 1).

No segundo caso, todas as soluções tendem para o infinito quando $t??$?. As soluções do tipo $X_1(t)=?e^{?_1 t}(1,0)$? e $X_2(t)=?e^{?_2 t}(0,1)$? são linhas instáveis. O ponto de equilíbrio desse sistema é chamado *fonte* (veja Fig. 2).

Já no terceiro caso, todas as soluções tendem para o ponto (0,0) quando $t??$?. As soluções do tipo $X_1(t)=?e^{?_1 t}(1,0)$? e $X_2(t)=?e^{?_2 t}(0,1)$? são linhas estáveis. O ponto de equilíbrio desse sistema é chamado *poço* (veja Fig. 3).

Exemplo 2. Consideremos um sistema $X'=AX$?, onde A é a matriz 2x2 com coeficientes $?$, $??$, $-??$, $?$, com $?±?$? autovalores complexos de A e autovetor $V_0=(1,i)$.? Podemos considerar três casos:

1. $?=0;$?

2. $?>0;$?

3. $?<0.$?

No primeiro caso, a solução geral será a função periódica $X(t)=?(\cos(?t),-sen(?t))+?(sen(?t),\cos(?t))$?, logo as soluções não tendem a se aproximar ou a se afastar da origem, elas se mantém em uma órbita circular ou elíptica. O sentido para o qual as soluções avançam com o tempo dependem do sinal de $?$,? se for positivo o sentido é horário, se for negativo, anti-horário. O ponto de equilíbrio deste tipo de sistema é chamado *centro* (veja Fig. 4).

No segundo caso, todas as soluções tendem para o infinito quando $t??$?, porém as funções periódicas que acompanham o termo $e^{?t}$? fazem com que as soluções vão para o infinito em forma de espiral. O ponto de equilíbrio desse tipo de sistema é chamado *fonte espiral* (veja Fig. 5).

Por fim, o terceiro caso é análogo ao segundo, porém com as soluções tendendo para a origem. O ponto de equilíbrio desse tipo de sistema é chamado *poço espiral* (veja Fig. 6).

O Plano Traço-Determinante

Para uma matriz A $2x2$ com coeficientes a, b, c e d? sabemos que os autovalores são as raízes do seu polinômio característico. Denotando o traço de A como $T=tr\,A=a+d$? e o determinante de A como $D=\det A=ad-bc$?, temos:

$?^2-T?+D=0$?.

Portanto, os autovalores de A satisfazem

$?_± =(T±(T^2-4D)^{1/2})$?.

ISSN: 1806-549X

Logo, podemos classificar um sistema planar $X'=AX$? por meio do traço e do determinante de A.

· Se $T2\text{-}4D<0$?, então os autovalores são complexos com parte imaginária não-nula, e se:

1. $T<0$?, temos um poço espiral;

2. $T>0$?, temos uma fonte espiral;

3. $T=0$?, temos um centro.

· Se $T2\text{-}4D>0$?, então os autovalores são reais e distintos, e se:

1. $D<0$?, temos uma sela;

2. $D>0$? e $T<0$?, temos um poço;

3. $D>0$? e $T>0$?, temos uma fonte.

· Se $T2\text{-}4D=0$?, então os autovalores são reais e repetidos, e se:

1. $T<0$?, temos um poço;

2. $T>0$?, temos uma fonte.

Por fim, podemos construir o plano T-D para ilustrar o que observamos quanto a classificação dos sistemas planares de equações diferencias lineares (veja Fig. 7).

Referências:

HIRSCH, Morris W. et al., **Differntial Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**, 2ª Ed., 1974.

BOYCE, E William, **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,** 8ª Ed, 1979.

? ? ?

Figura 1: Sela **Figura 2: Fonte** **Figura 3: Poço** ? ? ?

Figura 4: Centro **Figura 5: Fonte Espiral** **Figura 6: Poço Espiral**

?

Figura 7: Plano Traço-Determinante