11º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS: UMA INTRODUÇÃO.

Autores: JULLIE ANNE CARVALHO BORGES, DANIEL OLIVEIRA SILVA, FERNANDO FÉLIX OLIVEIRA E SILVA

Introdução

O conceito de variedade surgiu gradativamente da geometria e também da teoria de funções por volta do século XIX. O matemático Riemman construiu o que hoje são chamadas superfícies de Riemman que podem ser entendidas como um dos primeiros exemplos de variedades abstratas. Em seguida, o matemático francês Henri Poincaré iniciou uma análise topológica de tais objetos, em uma série de artigos memoráveis por sua força e originalidade.

Embora o matemático Herman Weyl tenha introduzido em 1912 um conceito formal de variedade diferenciável, a teoria apenas foi firmemente estabelecida após os trabalhos de Whitney em 1936, tendo então um rápido desenvolvimento.

As variedades diferenciáveis podem ser encontrados em diversos campos da ciência em geral. Na álgebra podem ser estudados os grupos de Lie, na relatividade pode ser visto como espaço-tempo, em mecânica como espaços de fase e superfícies de energia. Grosso modo, uma variedade diferenciável é como uma superfície, só que não precisa estar contida em um espaço euclidiano. O estudo das propriedades locais e globais de uma variedade é de interesse para diversas áreas.

Esse trabalho teve como objetivo introduzir as noções de variedade diferenciáveis, discutir as motivações que a ela conduzem e algumas variantes de sua definição, preparando o caminho para a introdução da Geometria Riemanniana, que é nosso objetivo final de estudo.

Material e métodos

Este trabalho é resultado de uma iniciação científica em matemática, realizada dentro do Programa Institucional de Iniciação Científica Voluntaria (ICV) da Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES), sob a orientação de um professor desta universidade e teve como objetivo preencher os requisitos necessários para obtenção do certificado de conclusão de iniciação científica.

O trabalho foi desenvolvido por meio de estudos individuais, discussões e apresentação de seminários, realizados pelo professor orientador e acadêmicos dos anos finais do curso de Matemática. Foram utilizadas como referências bibliográficas, notas de aulas, trabalho de conclusão de curso, bem como livros de Variedades Diferenciáveis, os quais se encontram nas referências.

Resultados e discussão

Definição 1: Seja ? um espaço topológico. Uma carta em ? é um homeomorfismo ? de um aberto ? ? ? sobre um aberto ?(?) ? ??. Uma carta ?: ? ? ?? chama-se também sistema de coordenadas locais em ?; o aberto ? é uma *vizinhança*. Veja figura 1.

Se ? ? ? e ?(?) = (?1(?),...,??(?)) , os números ?1(?),...,??(?) são as coordenadas de ? na carta ?. Se ?? ? ? ??, ?? ? ? ? ? são cartas em ?, e ? ? ? ? ø, então as aplicações:

? ? ??1? ?(? ? ?) ? ?(? ? ?) e

? ? ??1 ? ?(? ? ?) ? ?(? ? ?),

são chamadas de *mudanças de coordenadas.*

ISSN: 1806-549X

11º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO

UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS

Realização: Unimontes · Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Ensino Superior · Minas Gerais · PIBID Unimontes

Apoio: FAPEMIG · FADENOR

Obs. Se x : U ? ?? é uma carta e V ? U é um aberto, é claro que ?|? : V ? ?? é também uma carta.

Definição 2: Um atlas de dimensão m e classe, C^k , k ? ?, no espaço topológico ? é um conjunto ? de cartas x : U ? ?? de dimensão m, cujos domínios formam uma cobertura de ?, e cujas mudanças de coordenadas são aplicações de classe C^k .

Definição 3: Dois atlas ? e $?_1$, ambos de dimensão m e classe C^k , em ? são equivalentes se ? ? $?_1$ é um atlas de dimensão m e classe C^k em ?. Em outras palavras, ? e $?_1$ são equivalentes se, para toda carta x ? ? e toda carta y ? $?_1$, as mudanças de coordenadas x ? y $?_1$ e y ? x $?_1$ são de classe C^k .

Proposição: A relação " ? é equivalente a $?_1$" é uma relação de equivalência no conjunto dos atlas de dimensão m e classe C^k em ?.

Demonstração: A única propriedade não evidente é a transitividade. Para prová-la sejam ?, $?_1$, $?_2$ atlas em ? tais que ? seja equivalente a $?_1$ e $?_1$ equivalente a $?_2$.

Sejam x : U ? ?? e x_2 : U_2 ? ?? cartas tais que x ? ?, x_2 ? $?_2$ e U ? U_2 ? ø. Queremos provar que x ? $x_2?_1$ e x_2 ? $x?_1$ são C^k . Seja p ? U ? U_2. Existe carta x_1 : U_1 ? ??, x_1 ? $?_1$, tal que p ? U_1. Seja V = U ? U_1 ? U_2. Como ? é equivalente a $?_1$ e $?_1$ equivalente a $?_2$, resulta que x ? x $_1?_1$, x_1 ? x $?_1$, x_1 ? $x_2?_1$ e x_2 ? $x_1?_1$ são C^k .

Portanto,

$$x ? x_2?1 = (x ? x_1?1) \cdot (x_1 ? x_2?1) : x_2(V) ? x(V) \text{ e}$$

$$x_2 ? x?1 = (x_2 ? x_1?1) \cdot (x_1 ? x?1) : x(V) ? x_2(V)$$

são C^k . Resulta que ? é equivalente a $?_2$.

A união de todos os atlas de dimensão m e classe C^k de uma mesma classe de equivalência é evidentemente um atlas, chamado de atlas máximo da classe.

Definição 4: Uma variedade diferencial de dimensão m e classe C^k é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável de abertos, dotado de um atlas máximo de dimensão m e classe C^k.

Obs. A estrutura diferençável de ? é obtida escolhendo-se um atlas A de classe C^k e tomando-se o *atlas máximo* da classe de equivalência de ?.

Exemplo 1: Seja ? uma variedade de dimensão m e classe C^k e seja ? uma parte aberta de ?. Então ? induz em ? uma estrutura de variedade de mesma dimensão e classe que ?. De fato, se ? é um atlas em ?, o conjunto ?, das restrições a ? das cartas de ?, é um atlas em ? de mesma dimensão e classe que ?. Se ? é um atlas equivalente a ?, então ? ? ? é um atlas C^k em ? e ? ? ? = ? ? ? é também um atlas C^k em ? Logo, ? e ? são atlas equivalentes em ?, ou seja, a classe de equivalência de ? só depende da de ? e , portanto, define em ? uma estrutura diferencial que depende apenas da de ?.

Exemplo 2: Seja ?? com a topologia usual e consideremos a aplicação identidade x(p) = p de ??. O atlas ? = {x} é de dimensão n e classe $C^?$. A classe de equivalência de ? define em ?? uma estrutura de variedade diferencial de dimensão n e classe $C^?$.

Conclusão/Conclusões/Considerações finais

As variedades diferenciáveis consistem em uma gama de objetos, cuja utilidade não é restrita apenas a matemática, sendo amplamente utilizadas em problemas da física, biologia e até mesmo da economia, podendo por exemplo, serem utilizadas como espaços modelo de diversos problemas.

Tendo em vista sua imensa utilidade, o estudo de suas características locais e globais de forma aprofundada se mostra um importante pré requisito para estudos de outros temas.

Por fim, esse tema subsidia o estudo da Geometria Riemanniana, ramo da Matemática, objeto central de estudo desta iniciação cientifica, de grande importância no desenvolvimento de outras áreas, como a Física Moderna e a

ISSN: 1806-549X

Teoria da Relatividade de Einstein.

Agradecimentos

Agradecemos aos professores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pela elaboração do material utilizado como referência bibliográfica. Ao meu orientador pela elaboração e o seu comprometimento no que tange a este projeto de iniciação cientifica. Agradecemos ainda a Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes) pelo apoio logístico, através da disponibilização de local e pessoal e por viabilizar a realização do projeto institucionalizado: Geometria Riemanniana : Uma Introdução.

Referências bibliográficas

LIMA, E. L. Variedades Diferenciáveis, 2007. Disponível em: < www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/pm/PM_25.pdf>. Acesso em 29 Set. 2017.

Notas de Aulas. Disponível em Acesso em 29 Set. 2017

Trabalho de Conclusão de Curso < file:///C:/Users/PC/Desktop/TCC-RayssaCaju.pdf > Acesso em 29 Set. 2017

FILHO, Jose Régis A. V. Geometria e Topologia, < http://www.ime.unicamp.br/~regisvarao/out/topo.dif.pdf> Acesso em 29 Set. 2017.

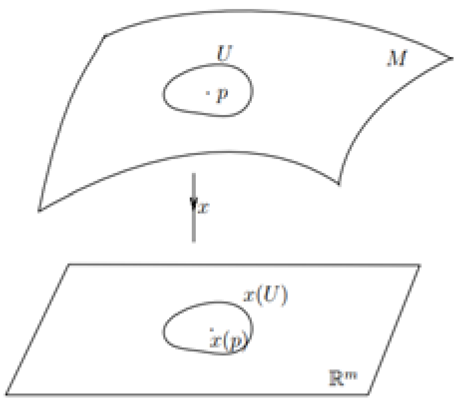

Figura1: Sistema de coordenadas