11º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X
Realização: Unimontes, Minas Gerais, PIBID Unimontes. Apoio: FAPEMIG, FADENOR

MÉTRICAS RIEMANNIANAS: UMA INTRODUÇÃO

Autores: KAROLINE OLIVEIRA DE JESUS, DANIEL OLIVEIRA SILVA, FERNANDO FÉLIX OLIVEIRA E SILVA

Introdução

A história da geometria diferencial começa com o estudo de curvas. Noções como retas tangentes a curvas já são encontradas entre os gregos Euclides, Arquimedes e Apolônio. Em 1854, Bernhard Riemann (1826-1860) proferiu uma conferência sobre geometria para os docentes da faculdade de filosofia da Universidade de Göttingen. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que era chefe de departamento, ficou entusiasmado. As ideias revolucionárias de Riemann generalizaram a geometria das superfícies que tinha sido estudada anteriormente por Gauss, Bolyai e Lobachevsky. Posteriormente, ele introduziu uma forma diferencial quadrática, hoje chamada de *métrica riemanniana*, o que levou a uma definição exata do conceito moderno de variedade riemanniana.

O objetivo desse trabalho é apresentar um estudo introdutório sobre métricas riemannianas. A geometria riemanniana é o ramo da geometria diferencial que estuda as variedades riemannianas, que são variedades diferenciáveis com uma métrica riemanniana. A métrica riemanniana funciona como um produto interno no espaço tangente em cada ponto da variedade, mas que varia suavemente de um ponto para outro da variedade.

A geometria riemanniana generaliza, para variedades em geral, a noção de distância entre dois pontos. Com isso, torna-se possível trabalhar propriedades geométricas presentes em espaços euclidianos sobre variedades, como isometrias, comprimentos, áreas e volumes.

Material e métodos

Este estudo foi realizado por uma acadêmica do curso de Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), sob a orientação de um professor universitário no âmbito do Programa Institucional de Iniciação Científica Voluntária (ICV) da Unimontes. Compartilhar esse trabalho é um dos requisitos necessários para a obtenção do certificado de conclusão de iniciação científica. Para o estudo das métricas riemannianas foram utilizadas notas de aulas de cursos de doutorado ministrados na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e outros materiais que se encontram nas referências. As discussões sobre os assuntos propostos acontecem semanalmente na Unimontes, depois de estudos individuais e/ou em grupo, em forma de seminários.

11º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X
Realização: Unimontes Universidade Estadual de Montes Claros; Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Ensino Superior; Minas Gerais Governo de Todos; PIBID Unimontes
Apoio: FAPEMIG; FADENOR

Resultados e discussão

Uma *Métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma aplicação que associa a cada ponto p de M um produto interno no espaço tangente T_pM. Seja g uma métrica riemanniana em M. Indicamos por $g_p(u,v)$ o produto interno entre os vetores $u, v \in T_p$M.

O *comprimento* ou *norma* do vetor tangente $u \in T_p$M é definido por $\sqrt{g_p(u,u)}$.

Uma métrica riemanniana em que os produtos internos nos diversos espaços tangentes não estão relacionados entre si não tem interesse. É desejável que o produto interno dependa pelo menos continuamente do ponto p de M. A métrica g deve variar diferencialmente com p no sentido de que se φ: U→V é uma carta para uma vizinhança coordenada V de M e $B_p = \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right\}$ é a base coordenada de T_pM associada a esta carta para cada p em V, então as funções g_{ij}: V→ℝ

$$g_{ij}(p) = \langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \rangle_p$$

são diferenciáveis.

Uma *Variedade Riemanniana* é um par (M, g), onde M é uma variedade diferenciável e g a métrica riemanniana. Toda variedade diferenciável possui pelo menos uma métrica riemanniana. O exemplo quase trivial de variedade riemanniana é M $= \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. $\mathbb{R}^n$ é chamado *espaço euclidiano de dimensão* n e a geometria riemanniana deste espaço é a geometria euclidiana.

Definição. Sejam M uma variedade diferenciável, (N, h) uma variedade riemanniana e $F: M \to N$ uma imersão. A *métrica induzida* por F em M e denotada por

$$g = F * h$$

é definida por

$$\langle v, w \rangle_p := \langle dF_p v, dF_p w \rangle_{F(p)}$$

11º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X
Realização: Unimontes, Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, Minas Gerais, PIBID Unimontes. Apoio: FAPEMIG, FADENOR

para todo $p \in$ M e para todos $v, w \in T_p$M. Com esta métrica definida em M, a imersão F torna-se uma *imersão isométrica*.

A métrica euclidiana, por exemplo, induz uma métrica na esfera de raio R

$$\mathbb{S}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = R^2\}$$

que é chamada de métrica canônica de $\mathbb{S}_R^n$.

Diz-se, por definição, que a métrica riemanniana g de M é de *classe* C^k se, para cada sistema de coordenadas x em M, a função $g^x : x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^r, ou seja, se as funções $g_{ij}^x : U \to \mathbb{R}$ são de classe C^r.

Dadas uma imersão $f: M^n \to N^n$, de classe C^{k+1}, e uma métrica riemanniana h em N, de classe C^k, existe uma métrica riemanniana g em M, de classe C^k, que torna f uma isometria local. Basta tomar g como a métrica induzida por f. A recíproca também é válida, isto é, dada uma imersão f, entre variedades de mesma dimensão, tal que M possui uma métrica riemanniana, então existe uma métrica em N que torna f uma isometria local. Isto é válido sobre a seguinte condição: se $p, q \in$ M são tais que $f(p) = f(q)$, então a transformação linear $f'(q)^{-1} \circ f'(p): T_p$M $\to T_q$M é uma isometria linear. Dessa forma, podemos ver que o plano projetivo (Figura 1) é uma variedade riemanniana.

Por definição, a restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b]$ contido em I chama-se um segmento. Se M é uma variedade riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$l_a^b(c) = \int_a^b < \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} >^{\frac{1}{2}} dt.$$

Da definição abaixo veremos como uma métrica riemanniana permite definir uma noção de volume em uma variedade riemanniana orientada M.

Definição. Seja R uma região (conjunto aberto e conexo), cujo fecho é compacto, contida em M. Suponhamos que R está contida em uma vizinhança coordenada $x(U)$ de uma parametrização $x: U \subset \mathbb{R}^n \to$ M positiva, e que a fronteira de $x^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ (a noção de medida nula em $\mathbb{R}^n$ é invariante por difeomorfismos). Definiremos o *volume* em R pela integral em $\mathbb{R}^n$

$$vol(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

ISSN: 1806-549X

A expressão acima está bem definida. Isto é, independe da parametrização. Pede-se que M seja orientada para evitar que $vol(R)$ mude de sinal. Para estender essa definição para regiões compactas que não estão contidas numa vizinhança coordenada basta considerar uma partição da unidade subordinada a uma cobertura (finita) de R por vizinhanças coordenadas.

Conclusão/Conclusões/Considerações finais

A geometria riemanniana estuda as variedades riemannianas, que são variedades diferenciáveis com uma métrica riemanniana. O desenvolvimento dessa geometria resultou na síntese de diversos resultados referentes à geometria das superfícies e ao comportamento das geodésicas sobre elas, com técnicas que podem ser aplicadas ao estudo de variedades diferenciáveis de dimensões superiores. Através dela se desenvolveu a teoria da relatividade geral de Einstein, a teoria de grupo, teoria de representação, bem como análise, e estimulou o desenvolvimento da topologia algébrica e diferencial. Isto, por si só, revela a importância do estudo desse tema.

Agradecimentos

Sinceros agradecimentos ao meu orientador pelo comprometimento com a referida iniciação científica. Todos os questionamentos e esclarecimentos que ele nos tem feito estão contribuindo para o nosso crescimento intelectual e, consequentemente, profissional. Agradecimentos também a Unimontes pelo apoio logístico e por viabilizar a realização do projeto de iniciação científica por meio do qual foi possível o estudo das métricas riemannianas e outros.

Referências bibliográficas

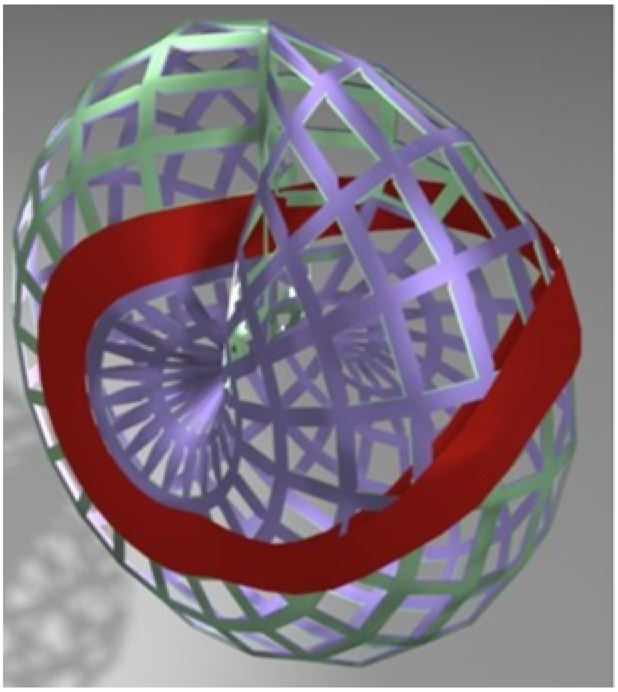
CARMO, M. do. **Geometria Riemanniana**. 5ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 335 p. (Projeto Euclides).

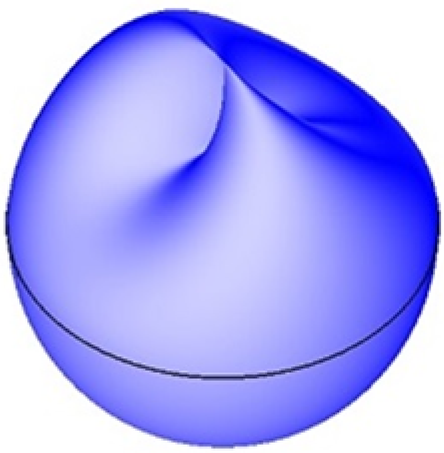
LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2ed. Washington: Springer, 2002. 628 p. (Graduate Texts in Mathematics, 218).

BIEZUNER, Rodney J. **Geometria Riemanniana**. 2016. Disponível em:<http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf>. Acesso em 24 de setembro de 2017.

BARBOSA, E. R. **Variedades Diferenciáveis**. Jan-Fev de 2016. 88f. Notas de Aula. Manuscrito.

LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis**. 2007. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM_25.pdf>. Acesso em 25 de setembro de 2017.





ISSN: 1806-549X

Figura 1. Planos projetivos.