

CENTROS SOBRE UMA VARIEDADE CENTRAL NO SISTEMA QUADRÁTICO OBTIDO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESCALAR DE TERCEIRA ORDEM

Autores: WARLEY FERREIRA DA CUNHA, ADRIANA MARTINS DA SILVA CASTRO

Centros sobre uma variedade central no sistema quadrático obtido de uma equação diferencial escalar de terceira ordem

Introdução

Considere a equação diferencial escalar de terceira ordem $x + f(x)y + g(x)y + h(x)y = 0$, com $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = a_1x + a_0$, $g(x) = b_1x + b_0$, $h(x) = c_1x^2 + c_2x + c_0$, $a_1, a_0, b_1, b_0, c_1, c_2, c_0 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$. Definindo as variáveis $y = z + x = x$, a equação diferencial pode ser escrita como o sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -(a_1x + a_0)y + (b_1x + b_0)y + c_1x^2 + c_2x + c_0, \end{cases} \quad (1)$$

em que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e $(a_1, a_0, b_1, b_0, c_1, c_2, c_0) \in \mathbb{R}^7$ são parâmetros reais. Nesse trabalho foram discutidas resultados sobre a existência de centros para o fluxo do sistema (1) escrito a uma variedade central local de centros equilíbrios isolados. Nossos estudos foram baseados em [1] e [2].

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

Resultados e discussão

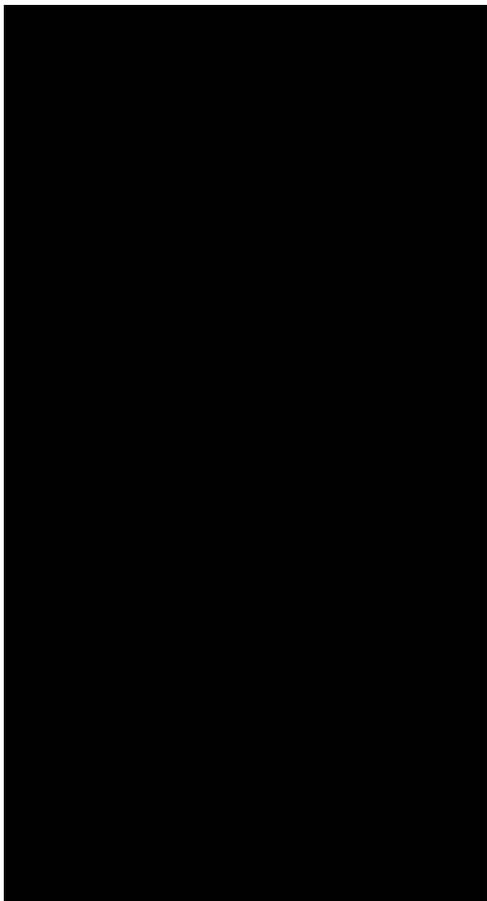
A escolha de funções afins reais para f e g , e uma função quadrática para h implica que o campo vetorial que define (1) é um campo vetorial quadrático em \mathbb{R}^3 . Os equilíbrios deste sistema são dados por $E_1 = (x_0, 0, 0)$, onde x_0 são os zeros reais da função h , isto é, $h(x_0) = 0$. Sendo h uma função quadrática, podemos ter 0, 1 ou 2 zeros reais. O que importa aqui é que o sistema (1) possui 0, 1 ou 2 pontos de equilíbrio, respectivamente. Não, nesse momento aqui será tomado no caso em que o sistema possui dois equilíbrios. Fazendo uma mudança de coordenadas, uma reparametrização no tempo, o sistema (1) pode ser escrito com a função h de forma $h(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $x_0 = 0$ e $x_1 = -1$. Daí, segue-se que o sistema (1) possui os equilíbrios $E_0 = (0, 0, 0)$ e $E_1 = (-1, 0, 0)$ e pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -(a_1x + a_0)y + (b_1x + b_0)y + x(x+1), \end{cases} \quad (2)$$

em que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e $(a_1, b_1, a_0, b_0) \in \mathbb{R}^4$ são parâmetros reais.

Teorema 1. Considere o sistema (2). Defina o conjunto $\mathcal{H}_0 = \{(a_1, b_1, a_0, b_0) \in \mathbb{R}^4 : a_1 > 0, b_1 > 0, a_0 b_0 = 1\}$. Se $(a_1, b_1, a_0, b_0) \in \mathcal{H}_0$, então o equilíbrio E_0 é não hiperbólico, isto é, possui um autovalor real negativo $\lambda_1 = -\frac{1}{b_0} < 0$ e um par de autovalores imaginários puros $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{b_0}$. Além disso, sobre a curva

??????



$$I_0 = \left\{ (a_1, b_1, a_2, b_2) \in H_1 : a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{b_1}, b_2 = 2b_1 \right\}.$$

$I_1(a_1, b_1, 0, b_1) \Big|_{I_0} = I_2(a_1, b_1, 0, b_1) \Big|_{I_0} = I_3(a_1, b_1, 0, b_1) \Big|_{I_0} = 0$, onde I_1, I_2 e I_3 denotam os 1^o, 2^o e 3^o coeficientes de Lyapunov em E_0 .

Teorema 2. Considere o sistema (2). Defina o conjunto $H_1 = \{(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4 : (a_1 - a_2) < 0, (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = -1\}$. Se $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in H_1$, então o equilíbrio E_1 é não hiperbólico. Isso é, possui um autovalor real positivo $\delta_{1,1} = (a_1 - a_2) > 0$ e um par de autovalores imaginários puros $\delta_{1,2,3} = \pm i \sqrt{a_1 - a_2}$. Além disso, sobre a curva

$$L_1 = \left\{ (a_1, b_1, a_2, b_2) \in H_1 : a_1 = 0, b_1 = \frac{1}{a_2}, b_2 = 0 \right\},$$

$I_1(0, b_1, a_2, 0) \Big|_{L_1} = I_2(0, b_1, a_2, 0) \Big|_{L_1} = I_3(0, b_1, a_2, 0) \Big|_{L_1} = 0$, onde I_1, I_2 e I_3 denotam os 1^o, 2^o e 3^o coeficientes de Lyapunov em E_1 .

Em [1] aparece a seguinte conjectura.

Conjectura. Considere o sistema (2) com valores de parâmetros em L_1 (L_2 , respectivamente). O equilíbrio E_0 (E_1 , respectivamente) é um centro para o fluxo do sistema (2) restrito a uma variedade central local?

Esta questão está relacionada com o Problema Foco-Centro. Dêmos resposta afirmativa à Conjectura acima, confirmando a presença de centros para o fluxo do sistema (2) restrito a uma variedade central local.

Teorema 3. Para parâmetros em L_1 , o sistema (2) possui uma família de superfícies algébricas invariantes $F_{b_1}^{-1}(0)$, $b_1 > 0$, onde $F_{b_1}(x, y, z) = b_1 x + z + b_1 x^2$. Além disso, a variedade central local $W_{loc}^c \subset F_{b_1}^{-1}(0)$ e o fluxo do sistema (2) restrito a $F_{b_1}^{-1}(0)$ possui um centro em E_0 .

Demonstração. Para parâmetros em L_1 , temos o campo vetorial associado ao sistema (2) $\mathcal{K}(x, y, z) = \left(y, z, -(x + b_1 y + \frac{1}{b_1} z + x^2 + 2b_1 xy) \right)$ (3). É simples ver que $\mathcal{K} F_{b_1} = \mathcal{K} F_{b_1}$ para o vetor $\mathcal{K}(x, y, z) = \left(-\frac{1}{b_1}, 0, 0 \right)$. Portanto, $F_{b_1}^{-1}(0)$ é uma superfície algébrica invariante do sistema definido por (3) para cada $b_1 > 0$. É imediato que $E_0 \in F_{b_1}^{-1}(0)$. O auto espaço central E_0^c em E_0 é gerado pelos vetores $V_{b_1}^1 = \left(-\frac{1}{b_1}, 0, 1 \right)$, $V_{b_1}^2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{b_1}}, 0 \right)$. O gradiente de F_{b_1} em E_0 é dado por $\nabla F_{b_1}(E_0) = (b_1, 0, 1)$. Logo, $\nabla F_{b_1}(E_0)$ é ortogonal aos vetores $V_{b_1}^1$ e $V_{b_1}^2$. Isso implica que $W_{loc}^c \subset F_{b_1}^{-1}(0)$. Reescrevendo $F_{b_1} = 0$ para a variável z em termos de x e substituindo nas duas primeiras equações do sistema definido por (3), obtemos o sistema

Realização:



Apoio:



$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\delta_1 x - \delta_2 xy, \end{cases} \text{ a qual é Hamiltoniano com função Hamiltoniana } H(x,y) = \frac{\delta_1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{\delta_2}{3}x^3. \text{ Portanto, o equilíbrio } E_1, \text{ a qual poderia ser um foco ou um centro (Problema Foco-Centro), é de fato um centro.}$$

Teorema 4. Para parâmetros em Σ_1 , o sistema (2) com a mudança de variáveis $(X, Y, Z) = (x, y, z) - (-1, 0, 0)$, a qual reduzida o equilíbrio $E_1 = (-1, 0, 0)$ para $F_1 = (0, 0, 0)$, possui uma família de superfícies algébricas invariantes $F_{\alpha_1}^{-1}(0), \alpha_1 > 0$, onde $F_{\alpha_1}(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_1 z$. Além disso, a variedade central local $W_{loc}^c \subset F_{\alpha_1}^{-1}(0)$ e o fecho do sistema (2), com a mudança de variáveis acima, reduzido a $F_{\alpha_1}^{-1}(0)$ possui um centro em F_1 .

Demonstração. Para parâmetros em Σ_1 , com a mudança de variáveis apresentada e por um abuso de linguagem, notamos as barras, obtemos o campo vetorial associado ao sistema (2) $v_{\alpha_1}(x, y, z) = \left(y, z, -\left(x + \frac{1}{\alpha_1}y - \alpha_1 z + x^2 + \alpha_1 xz \right) \right)$ (4). É simples ver que $v_{\alpha_1} F_{\alpha_1} = KF_{\alpha_1}$ para o vetor $K(x, y, z) = \alpha_1 - \alpha_1 z$. Portanto, $F_{\alpha_1}^{-1}(0)$ é uma superfície algébrica invariante do sistema definido por (4) para cada $\alpha_1 > 0$. É imediato que $F_1 \in F_{\alpha_1}^{-1}(0)$. O plano tangente T_{F_1} em F_1 é gerado pelos vetores $F_{\alpha_1}^{-1} = (-\alpha_1, 0, 1)$, $F_{\alpha_1}^2 = (0, -\sqrt{\alpha_1}, 0)$. O gradiente de F_{α_1} em F_1 é dado por $\nabla F_{\alpha_1}(F_1) = (0, 0, \alpha_1)$. Logo, $\nabla F_{\alpha_1}(F_1)$ é ortogonal aos vetores $F_{\alpha_1}^{-1}$ e $F_{\alpha_1}^2$. Isto implica que $W_{loc}^c \subset F_{\alpha_1}^{-1}(0)$. Resolvendo $F_{\alpha_1} = 0$ para a variável z em termos de x e substituindo nas duas primeiras equações do sistema definido por (4), temos as seguintes equações diferenciais $\dot{x} = y, \dot{y} = -\frac{1}{\alpha_1}x$, que é sistema linear Hamiltoniano, com função Hamiltoniana $H(x, y) = \frac{1}{2\alpha_1}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Portanto, o equilíbrio E_1 , que agora está no origem, e qual poderia ser um foco ou um centro, é de fato um centro.

Conclusão

Neste trabalho, estudamos soluções particulares para o Problema Foco-Centro sobre uma variedade central em \mathbb{R}^3 , inserindo a existência de superfícies algébricas invariantes, as quais permitem concluir a presença de centros para alguns campos vetoriais quadráticos em \mathbb{R}^3 , diante de algumas restrições nos valores de parâmetros.

Referências Bibliográficas

[1] DIAZ, P. S. and MULLA, L. F. Analysis of a quadratic system obtained from a cubic third order differential equation. *Electron. J. Differential Equations*, vol. 2016, p. 274, 2016.

[2] CUNHA, W. F. Estudo do problema foco-centro, generalizando aplicações. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, 2012.*