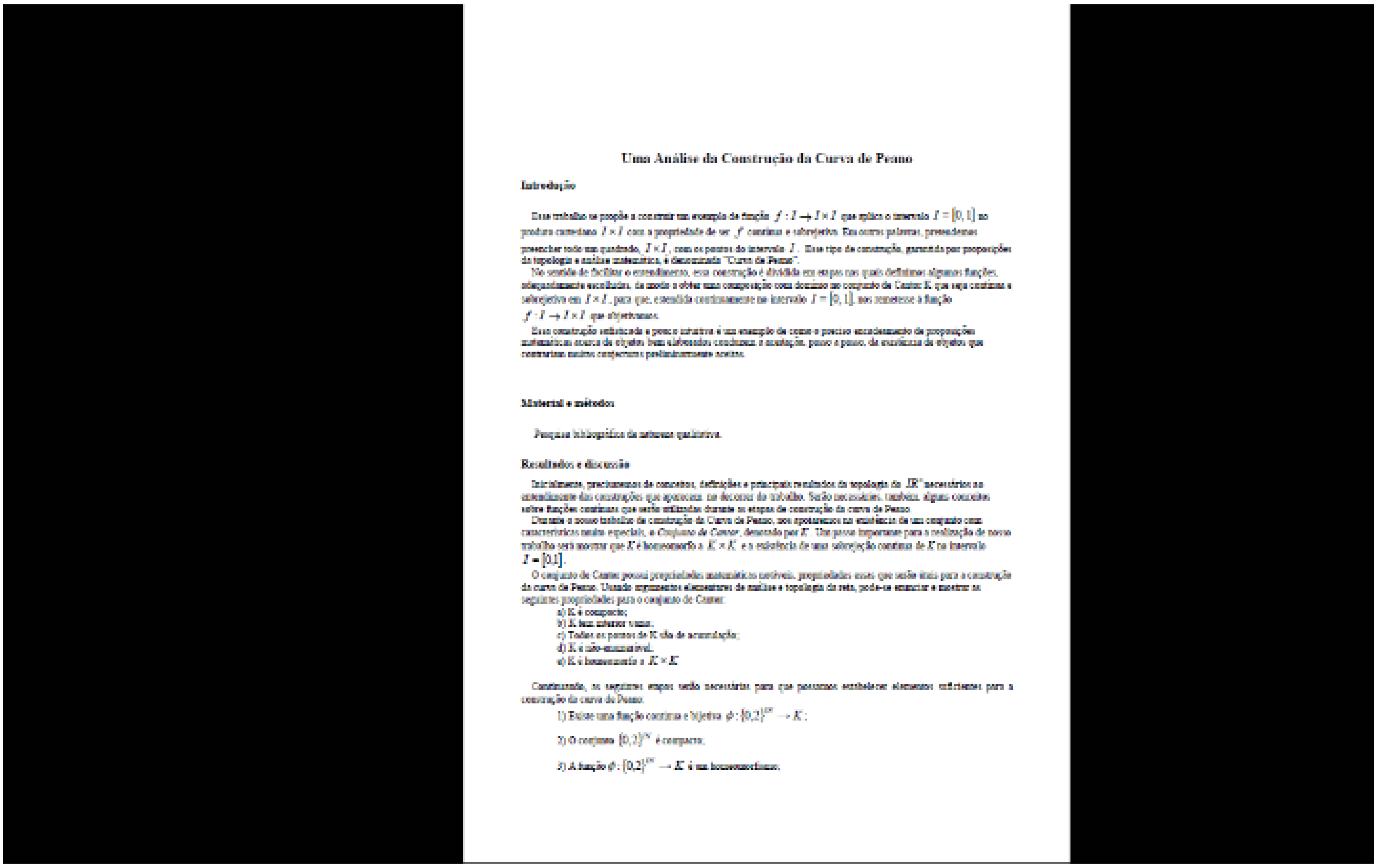
11º FEPEG FÓRUM ENSINO • PESQUISA EXTENSÃO • GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X
Realização: Unimontes; Minas Gerais
Apoio: PIBID Unimontes; FAPEMIG; FADENOR

UMA ANÁLISE DA CONSTRUÇÃO DA CURVA DE PEANO

Autores: ADRIANA MARTINS DA SILVA CASTRO, WARLEY FERREIRA DA CUNHA



Uma Análise da Construção da Curva de Peano

Introdução

Esse trabalho se propõe a construir um exemplo de função $f: I \to I \times I$ que aplica o intervalo $I = [0, 1]$ no produto cartesiano $I \times I$ com a propriedade de ser f contínua e sobrejetiva. Em outras palavras, pretendemos preencher todo um quadrado, $I \times I$, com os pontos do intervalo I. Esse tipo de construção, garantida por proposições da topologia e análise matemática, é denominada "Curva de Peano".

No sentido de facilitar o entendimento, essa construção é dividida em etapas nas quais definimos algumas funções, adequadamente escolhidas, de modo a obter uma composição com domínio no conjunto de Cantor K que seja contínua e sobrejetiva em $I \times I$, para que, estendida continuamente no intervalo $I = [0, 1]$, nos remetesse à função $f: I \to I \times I$ que objetivamos.

Essa construção sofisticada e pouco intuitiva é um exemplo de como o preciso encadeamento de proposições matemáticas acerca de objetos bem elaborados conduzem à aceitação, passo a passo, da existência de objetos que contrariam muitas conjecturas preliminarmente aceitas.

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

Resultados e discussão

Inicialmente, precisaremos de conceitos, definições e principais resultados da topologia do $\mathbb{R}^n$ necessários ao entendimento das construções que aparecem no decorrer do trabalho. Serão necessários, também, alguns conceitos sobre funções contínuas que serão utilizadas durante as etapas de construção da curva de Peano.

Durante o nosso trabalho de construção da Curva de Peano, nos apoiaremos na existência de um conjunto com características muito especiais, o *Conjunto de Cantor*, denotado por K. Um passo importante para a realização do nosso trabalho será mostrar que K é homeomorfo a $K \times K$ e a existência de uma sobrejeção contínua de K no intervalo $I = [0,1]$.

O conjunto de Cantor possui propriedades matemáticas notáveis, propriedades essas que serão úteis para a construção da curva de Peano. Usando argumentos elementares de análise e topologia da reta, pode-se enunciar e mostrar as seguintes propriedades para o conjunto de Cantor:

a) K é compacto;
b) K tem interior vazio;
c) Todos os pontos de K são de acumulação;
d) K é não-enumerável.
e) K é homeomorfo a $K \times K$

Continuando, as seguintes etapas serão necessárias para que possamos estabelecer elementos suficientes para a construção da curva de Peano.

1) Existe uma função contínua e bijetiva $\phi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to K$;

2) O conjunto $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ é compacto;

3) A função $\phi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to K$ é um homeomorfismo.

ISSN: 1806-549X
Realização: Unimontes Universidade Estadual de Montes Claros; Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Ensino Superior; Minas Gerais Governo de Todos; PIBID Unimontes Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
Apoio: FAPEMIG; FADENOR

4) Existe uma função $\psi : \{0,1\}^{IN} \to [0,1]$ contínua e sobrejetiva;

5) Existe um homeomorfismo $j : \{0,2\}^{IN} \to \{0,1\}^{IN}$;

6) Existe uma sobrejeção contínua $g : K \to [0,1]$

7) K é homeomorfo a $K \times K$

8) Existe uma extensão contínua $f : I \to I \times I$ para $h : K \to I \times I$

A partir daí, obtemos uma curva que "mapeia" ou "cobre" todos os pontos de uma região plana através de uma aplicação contínua e sobrejetora de um intervalo real $I = [0,1]$ em seu produto cartesiano $I \times I = [0,1] \times [0,1]$. Mais geralmente, é possível, a partir dos argumentos aqui desenvolvidos, se construir curvas que "preencham" hiper-cubos $I^n = I \times I \times \cdots \times I$ (n cópias) e, mais surpreendentemente, curvas que "preencham" o cubo de *Hilbert*, $I^{IN} = I \times I \times \cdots$.

Então, a nossa, sobrejetora procurada, função fica sendo a f construída nesse item:

$$f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$$

Conclusão/Conclusões/Considerações finais

O objetivo proposto para este trabalho foi a construção matemática de uma função contínua e sobrejetora $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ que mapeia uma região plana usando apenas pontos de um segmento de reta, a *Curva de Peano*.

Além da laboriosa construção matemática aqui desenvolvida, processos iterativos e computacionais são utilizados para construir curvas mais gerais que preenchem uma região plana. Esses processos podem ser implementados em algoritmos computacionais e seu resultado visualizado em um monitor ou outro dispositivo de saída. Naturalmente, dada a natureza finita desses processos, o resultado que obtemos trata-se de uma aproximação limitada à resolução oferecida pelo dispositivo. Entretanto, podemos concluir, por indução, que após infinitas interações desse processo teremos realizado o preenchimento de uma região plana.

Abaixo ilustramos, com um exemplo, a construção interativa de uma curva de Peano dada algoritmicamente.

11º FEPEG
FÓRUM ENSINO • PESQUISA EXTENSÃO • GESTÃO
UNIVERSIDADE, SOCIEDADE E POLÍTICAS PÚBLICAS
ISSN: 1806-549X
Realização:
Apoio:

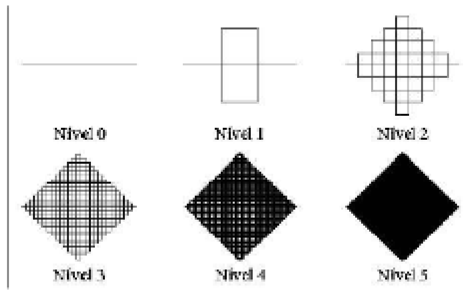


Figura1: A curva de Peano por Processo Interativo.

Na Figura 1, temos uma seqüência de 5 níveis da construção interativa de uma curva que, num processo finito, é suficiente para cobrir uma região plana do dispositivo gráfico que usamos.
Esse processo repetido indefinidamente, levaria ao preenchimento da região que já se pode perceber definida nos primeiros níveis de iteração.

Referências bibliográficas

DOMINGUES, Hygino. Espaços Métricos e Introdução à Topologia. Ed. da USP. São Paulo, 1982.
DOMINGUES, Hygino e IEZZI, Gelson. Álgebra Moderna. Ed. atual. São Paulo 2003.
FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise I. Ed LTC. Rio de Janeiro, 1996.
GONÇALVES, Adilson. Introdução à Álgebra. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2008.
KUHLKAMP, Nilo. Introdução à Topologia Geral. Ed. da UFSC. Florianópolis. 2002.
LIMA, Elon Lages. Análise Real, volume 1.IMPA. Rio de Janeiro. 2002.
LIMA, Elon Lages. Curso de análise, Volume 1. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 200
LIMA, Elon Lages. Espaços métricos. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro 2003.
LIMA, Elon Lages. Elementos de Topologia Geral. Ed. LTC. Rio de Janeiro, 1976.