

UMA ANÁLISE DA CONSTRUÇÃO DA CURVA DE PEANO

Autores: ADRIANA MARTINS DA SILVA CASTRO, WARLEY FERREIRA DA CUNHA

Uma Análise da Construção da Curva de Peano

Introdução

Este trabalho se propõe a construir um exemplo de função $f: I \rightarrow I \times I$ que aplica o intervalo $I = [0, 1]$ no produto cartesiano $I \times I$ com a propriedade de ser f contínua e sobrejetiva. Em outras palavras, pretendemos preencher todo um quadrado, $I \times I$, com os pontos do intervalo I . Esse tipo de construção, guiada por proposições da topologia e análise matemática, é denominada "Curva de Peano".

No sentido de facilitar o entendimento, essa construção é dividida em etapas nas quais definimos algumas funções, sucessivamente simplificadas, de modo a obter uma composição cujo domínio no conjunto de Cantor K , que seja contínua e sobrejetiva em $I \times I$, para que, e sendo f contínua no intervalo $I = [0, 1]$, nos remetesse à função $f: I \rightarrow I \times I$ que desejamos.

Essa construção utilizada e pouco utilizada é um exemplo de como o processo encadeamento de proposições matemáticas acerca de objetos bem elaborados conduzem a construção, passo a passo, de análises de objetos que constroem muitas conjecturas e posteriormente acertas.

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

Resultados e discussão

Inicialmente, precisamos de conceitos, definições e principais resultados da topologia de \mathbb{R}^n necessários ao entendimento das construções que aparecem no decorrer do trabalho. São necessárias, também, alguns conceitos sobre funções contínuas que serão utilizadas durante as etapas de construção da curva de Peano.

Durante o nosso trabalho de construção da Curva de Peano, nos apoiamos na existência de um conjunto com características muito especiais, o Conjunto de Cantor, denotado por K . Um passo importante para a realização de nosso trabalho será mostrar que K é homeomorfo a $K \times K$, e a existência de uma sobrejeção contínua de K no intervalo $I = [0, 1]$.

O conjunto de Cantor possui propriedades matemáticas notáveis, propriedades essas que serão úteis para a construção da curva de Peano. Usando argumentos elementares de análise e topologia de reta, pode-se afirmar e mostrar as seguintes propriedades para o conjunto de Cantor:

- K é compacto;
- K tem interior vazio;
- Todos os pontos de K são de acumulação;
- K é não-enumerável;
- K é homeomorfo a $K \times K$.

Construídas, as seguintes etapas serão necessárias para que possamos estabelecer elementos suficientes para a construção da curva de Peano:

- 1) Existe uma função contínua e bijetiva $\phi: [0, 2]^{100} \rightarrow K$;
- 2) O conjunto $[0, 2]^{100}$ é compacto;
- 3) A função $\phi: [0, 2]^{100} \rightarrow K$ é um homeomorfismo.

Realização:



Apoio:



4) Exista uma função $\psi: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0,1]$ contínua e sobrejetiva;

5) Exista um homeomorfismo $j: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$;

6) Exista uma sobrejeção contínua $g: K \rightarrow [0,1]$;

7) K é homeomorfo a $K \times K$;

8) Exista uma extensão contínua $f: I \rightarrow I \times I$ para $h: K \rightarrow I \times I$.

A partir daí, obtivemos uma curva que "passa" ou "cobre" todos os pontos de uma região plana através de uma aplicação contínua e sobrejetiva de um intervalo real $I = [0,1]$ em seu produto cartesiano $I \times I = [0,1] \times [0,1]$. Mais precisamente, é possível, a partir dos argumentos aqui desenvolvidos, se construir curvas que "preenchem" hiper-cubos $I^n = I \times I \times \dots \times I$ (n regiões) e, mais impressionantemente, curvas que "preenchem" o cubo de Hilbert, $I^{\mathbb{N}} = I \times I \times \dots$.

Então, a curva, sobrigenerosamente procurada, função fixa sendo a f construída nesse item:

$$f: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$$

Conclusão/Concluições/Considerações finais

O objetivo proposto para esse trabalho foi a construção matemática de uma função contínua e sobrejetiva $f: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ que mapeia uma região plana usando apenas pontos de um segmento de reta, a Curva de Peano.

Além da laboriosa construção matemática aqui desenvolvida, processos iterativos e computacionais são utilizados para construir curvas mais gerais que preenchem uma região plana. Esses processos podem ser implementados em algoritmos computacionais e seu resultado visualizado em um monitor ou outro dispositivo de saída. Naturalmente, dada a natureza deste tipo de processo, o resultado que obtemos trata-se de uma aproximação limitada à resolução oferecida pelo dispositivo. Entretanto, podemos concluir, por indução, que após infinitas iterações desse processo teremos exatamente a preenchimento de uma região plana.

Além disso, com um exemplo, a construção iterativa de uma curva de Peano dada algoritmicamente.

